II.B Équation de la chaleur

Théorème 18: Équation de la chaleur

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(\pi)=0$. Notons K_f l'ensemble des éléments

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi]\times\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & u(x,t) \end{array} \right.$$

de $\mathcal{C}\left([0,\pi]\times\mathbb{R}_+\right)$ qui vérifient :

(1) $\partial_x u$ et $\partial_t u$ existent et sont continues sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,

(2) $\partial^2_{x^2} u$ existe et est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,

(3) pour tout réel $t \geqslant 0, u(0,t)=u(\pi,t)=0$,

(4) pour tout $(x,t)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*, \partial_t u(x,t)=\partial^2_{x^2}u(x,t)$;

(5) Pour tout $x\in[0,\pi], u(x,0)=f(x)$.

Alors K_f est un singleton.

Dans ce développement il est important de commencer par modéliser le problème que l'on essaie de résoudre. Ici on se donne une barre de longueur π et on met un thermostat à chaque extrémité de la barre (par exemple des poches de glaces). On s'intéresse à l'évolution de la température en fonction du temps et de la position sur la barre lorsqu'on se donne la température en tout point à l'instant initial. On va voir ici qu'il existe une solution, qu'elle s'exprime comme une série de Fourier et que cette solution est unique.

Démonstration.

Existence

Méthode de séparation des variables

Soit $u:(x,t)\mapsto X(x)T(t)$ une application non identiquement nulle où $X\in\mathcal{C}^2([0,\pi],\mathbb{R})$ et $T\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Alors u est continue et vérifie (1) et (2).
Supposons que u vérifie aussi (3) et (4).

Alors comme $u\neq 0$, on peut trouver $(x_0,t_0)\in]0,\pi[\times\mathbb{R}_+$, tel que $u(x_0,t_0)\neq 0$ et par continuité de u, on peut même imposer $t_0>0$. (En particulier $X(x_0)\neq 0$ et $T(t_0)\neq 0$).
Mais alors :

$$X(x_0)T'(t_0)=X''(x_0)T(t_0)$$

On pose alors $k=-\dfrac{T'(t_0)}{T(t_0)}=-\dfrac{X''(x_0)}{X(x_0)}$.
Comme l'équation

$$X(x)T'(t)=X''(x)T(t)$$

est vérifiée pour tout x et tout t, on a en particulier $X''=-kX$ et $T'=-kT$. On commence par résoudre ces équations simplifiées.

Supposons $k<0$

Alors il existe (A,B), non tous deux nuls, tels que :

$$X(x)=A\mathrm{e}^{\sqrt{-k}x}+B\mathrm{e}^{-\sqrt{-k}x}$$

D'après les conditions aux bords imposent alors $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp(\sqrt{-k}\pi) & \exp(-\sqrt{-k}\pi) \end{pmatrix}\right)$ or cette matrice est inversible. C'est donc absurde car $u \neq 0$, donc $k \geqslant 0$.

Supposons $k = 0$

Alors $X(x) = Ax + B$ et les conditions aux bords imposent alors $A = B = 0$.

Donc $k > 0$

et il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, non nul, tel que

$$X(x) = A\cos(\sqrt{k}x) + B\sin(\sqrt{k}x)$$

Les conditions aux bords donnent alors : $A = 0$ et $\sin(\sqrt{k}\pi) = 0$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{k} = n$ et donc $X(x) = B\sin(nx)$, et $T(t) = Ce^{-n^2t}$ puis, il existe un réel $K \in \mathbb{R}^*$, et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$u(x,t) = K\sin(nx)\exp\left(-n^2t\right)$$

pour tout couple $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$ et même, par continuité de u, pour tout $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, on vérifie qu'une telle fonction vérifie bien les points (1), (2), (3) et (4). Désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous noterons :

$$u_n(x,t) = \sin(nx)\exp\left(-n^2t\right)$$

Superposition des solutions

On prolonge la fonction f par 2π-périodicité et imparité sur $\mathbb{R}$. On note $\tilde{f}$ ce prolongement. On a donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}_m^1$ et on note $b_n(\tilde{f})$ les coefficients de Fourier réels de $\tilde{f}$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} b_n(\tilde{f})u_n$ converge normalement donc simplement sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+$. En effet, comme $\tilde{f}$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, f est limite uniforme de sa série de Fourier et on a donc $\left(b_n(\tilde{f})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, or pour tout $n \geqslant 1$:

$$\left\|b_n(\tilde{f})u_n\right\|_\infty \leqslant \left|b_n(\tilde{f})\right|$$

On note S la somme de la série.

La convergence normale (donc uniforme) de la série et la continuité des u_n nous assurent donc la continuité de S sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+$.

On a immédiatement pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $S(0,t) = S(\pi,t) = 0$. Donc la fonction S vérifie (3).

Montrons que S vérifie aussi (1) et (2).

Par analogie des méthodes, on traite l'existence et la continuité, par exemple de $\partial_t S$:

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [0,\pi]$, tout $t \in [\varepsilon, +\infty[$, et tout entier $n \geqslant 1$, $u_n(x,\cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ et :

$$\left|\partial_t\left(b_n(\tilde{f})u_n\right)(x,t)\right| \leqslant \left|b_n(\tilde{f})\right| n^2 \mathrm{e}^{-n^2\varepsilon} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\left|b_n(\tilde{f})\right|\right)$$

donc, comme la série $\sum_{n\geqslant 1}\left|b_n(\tilde{f})\right|$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n(\tilde{f})\partial_t u_n(x,\cdot)$ converge normalement sur $]\varepsilon, +\infty[]$, pour tout $x \in [0,\pi]$. Mais ε étant quelconque, S est donc dérivable selon t sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$, et $\partial_t S$ est obtenue en dérivant terme à terme dans la série.

De plus, $b_n(\tilde{f})\partial_t u_n$ est continue sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$ et la majoration

$$\left|\partial_t\left(b_n(\tilde{f})u_n(x,t)\right)\right| \leqslant |b_n(\tilde{f})|n^2e^{-n^2\varepsilon}$$

est indépendante de x et de t, donc $\sum b_n(\tilde{f})\partial_t u_n$ converge normalement sur $[0,\pi] \times [\varepsilon, +\infty[$. Donc $\partial_t S$ est continue sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$.

On montre de même que $\partial_x S$ et $\partial^2_{x^2} S$ existent et sont continues et se calculent par dérivation terme à terme.

La linéarité de l'équation de la chaleur assure que S vérifie (4).

Enfin, pour tout $x \in [0, \pi]$, $S(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\tilde{f}) \sin(nx)$ est la somme de la série de Fourier de $\tilde{f}$ c'est donc $\tilde{f}$ puisque $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_m$. C'est-à-dire que S vérifie (5).
Au final, $S \in K_f$.

Unicité

Soient u_1 et u_2 des éléments de K_f. Posons $u = u_1 - u_2$. Alors $u \in K_0$.
On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $H : t \mapsto \displaystyle\int_0^\pi u^2(x, t)\mathrm{d}x$.
Comme u est continue sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$, H l'est aussi sur $\mathbb{R}_+$. De plus l'existence et la continuité de $\partial_t u$ sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$ assurent que H est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$H'(t) = \int_0^\pi 2\partial_t u(x, t)u(x, t)\mathrm{d}x = \int_0^\pi 2\partial^2_{x^2} u(x, t)u(x, t)\mathrm{d}x$$

Par IPP et conditions aux bords, on a :

$$\begin{aligned} H'(t) &= [2u(x, t)\partial_x u(x, t)]_0^\pi - 2\int_0^\pi (\partial_x u(x, t))^2 \, \mathrm{d}x \\ &= -2\int_0^\pi (\partial_x u(x, t))^2 \, \mathrm{d}x \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc H est à la fois décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$, et, $H(0) = 0$ par (5). Donc H est identiquement nulle, et comme u^2 est positive continue, $u_1 = u_2$. ■

De plus, on a une formule explicite pour la solution de l'équation de la chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [0, \pi] \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\tilde{f}) \sin(nx)\mathrm{e}^{-n^2 t} \end{array} \right.$$